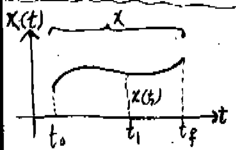
(فصل ۱)

$$\begin{cases} x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \\ u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$



تاریخچه یا سابقه مقادیر سیگنال کنترل در مدت $[t_0, t_f]$ توسط u نمایش می دهیم و آن را سابقه کنترل یا بطور ساده کنترل گویند.
تاریخچه یا مقادیر وضعیت در فاصله $[t_0, t_f]$ بنام سابقه وضعیت یا منحنی وضعیت نامیده شده و توسط x نشان داده می شود.

<u>مسأله اصلی</u>: کنترل قابل قبول u^* که باعث میشود سیستم $\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$ مسیر قابل قبول x^* را تعقیب نموده و تابعی زیر را حداقل نماید پیدا نمائید:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\,dt$$

(u^* کنترل بهینه و x^* منحنی مسیر بهینه میباشد)

$\delta(t-t_0)$ و $\mathbb{1}(t-t_0)$

<u>معادلات وضعیت</u>:

۱) $\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$: سیستمهای کلی؛

۲) $\dot{x}(t) = a(x(t), u(t))$: سیستم غیرخطی متغیر با زمان؛

۳) $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$: سیستم خطی و متغیر با زمان: $A(t)$ و $B(t)$ ماتریسهای $n\times n$ و $m\times m$ با عناصر متغیر با زمان می باشد.

۴) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$: سیستم خطی و غیرمتغیر با زمان: A و B ماتریسهای ثابت هستند.

۵) خروجی: $y(t) = c(x(t), u(t), t)$ ؛

۶) خروجی: $y(t) = c\,x(t) + Du(t)$؛ خطی و غیرمتغیر با زمان. که در آن $c_{q\times n}$ و $D_{q\times m}$.

<u>[حل معا]دلات وضعیت</u>:

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$:

۱) حل بصورت روبرو است؛

$$x(t) = \phi(t, t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau)\,d\tau$$

۲) غیرمتغیر با زمان و خطی؛

$$\begin{cases} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}x(0) + [sI-A]^{-1}BU(s)\} \\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)x(0) + H(s)U(s)\} \\ x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

<u>نکته ۱</u>:

$$\begin{cases} e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[\phi(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}\} \triangleq \phi(t) \\ e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau = \mathcal{L}^{-1}[H(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{[sI-A]^{-1}BU(s)\} \triangleq \phi(t)\int_0^t \phi(-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

<u>خواص ماتریس انتقال وضعیت</u>:

متغیر با زمان	غیرمتغیر با زمان
$\phi(t, t) = I$	$\phi(0) = I$
$\phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$	$\phi(t_2-t_1)\phi(t_1-t_0) = \phi(t_2-t_0)$
$\phi^{-1}(t_2, t_1) = \phi(t_1, t_2)$	$\phi^{-1}(t_2-t_1) = \phi(t_1-t_2)$
$\frac{d}{dt}(\phi(t, t_0)) = A(t)\phi(t, t_0)$	$\frac{d}{dt}(\phi(t)) = A\phi(t)$

<u>برای سیستمهائیکه دارای ماتریس ثابت A باشد</u>:

۱) معکوس ماتریس $[sI-A]$ و بدست آوردن تبدیل معکوس لاپلاس هر عنصر آن

۲) $e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$

۳) دیاگرام میسون $\phi(s)$ را بدست آورده ؟؟

<u>برای سیستمهائیکه ماتریس A متغیر با زمان هستند</u>:

$$\frac{d}{dt}(\phi(t, t_0)) = A(t)\,\phi(t, t_0)$$

(فصل ۲) $J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\,dt$:

$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \Rightarrow \begin{cases} u^* \in U & \text{باید } U \text{ را پیدا کنیم که با } u^* \text{ که} \\ \dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) & \text{مسیر } x^* \text{ پیدا شود که} \end{cases}$

مسأله حداقل زمان: $J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$ ، (t_f اولین لحظه ای است که $x(t)$ با مجموعه هدف برخورد کند)

مسأله کنترل وضعیت نهائی:

عادی: $J = \sum_{i=1}^{n} [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2$ ($r(t_f)$ مقدار مطلوب)

ماتریسی: $J = [x(t_f) - r(t_f)]^T [x(t_f) - r(t_f)]$

$J = \| x(t_f) - r(t_f) \|^2$

$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T H [x(t_f) - r(t_f)]$

$J = \| x(t_f) - r(t_f) \|_H^2$

مثبت موکد: $Z^T H Z \geq 0$ (برای همه Z)

$\|A\|_B^2 = A^T B A$

مسائل کنترل حداقل تلاش:

مثال کنترل سوخت

تک سیگنال کنترل: $J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|\,dt$

چند سیگنال: $J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i |u_i(t)| \right] dt$ (β_i ها ضرائب غیر منفی ارزش گذاری)

تک سیگنال: $J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\,dt$

ماتریسی: $J = \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R\, u(t)]\,dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2\,dt$

مسائل تعقیب (نزدیک کردن وضعیت نهائی):

: $J = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t_f) - r(t)\|_{Q(t)}^2\,dt$

(به ضربه و مشتق نرسیم) : $J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right] dt$

(به وضعیت نهائی برسیم) : $J = \|x(t_f) - r(t_f)\|^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\|x(t) - r(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right] dt$

مسائل تنظیم کننده ها:

مسأله خاص تعقیب که $r(t) = 0$

رابطه تراکمی:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \\ J = h(x(t_f)) + \int_0^{t_f} g(x(t), u(t))\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x(k+1) = a_D(x(k), u(k)) \\ J = h(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(x(k), u(k)) \end{matrix}$$

$$J_{NN}(x(N)) = h(x(N)) = J^*_{NN}(x(N))$$

$$\begin{cases} J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) \triangleq g_D(x(N-1), u(N-1)) + h(x(N)) \\ (N-1)\Delta t \leqslant t \leqslant N\Delta t \end{cases}$$

وضعیت اولیه $(N-1)$

$$\begin{cases} J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = g_D(x(N-1), u(N-1)) + J_{NN}(a_D(x(N-1), u(N-1))) \\ J^*_{N-1,N}(x(N-1)) \triangleq \min_{u(N-1)} \{ g_D(x(N-1), u(N-1)) + J_{NN}(a_D(x(N-1), u(N-1))) \} \end{cases}$$

کنترل حداقل کننده را با $u^*(x(N-1), u(N-1))$ نمایش می‌دهیم.

- $$J_{N-2,N}(x(N-2), u(N-2), u(N-1)) = g_D(x(N-2), u(N-2)) + J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1))$$

$$J^*_{N-K,N}(x(N-K)) = \min_{u(N-K)} \{ g_D(x(N-K), u(N-K)) + J^*_{N-(K-1),N}(a_D(x(N-K), u(N-K))) \}$$

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) H x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q(k) x(k) + u^T(k) R(k) u(k)]$$

- $$J_{NN}(x(N)) = \frac{1}{2} x^T(N) H x(N) = J^*_{NN}(x(N)) \triangleq x^T(N) P(0) x(N)$$

$$J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = \frac{1}{2} x^T(N-1) Q x(N-1) + \frac{1}{2} u^T(N-1) R u(N-1) + \frac{1}{2} x^T(N) P(0) x(N)$$

$$J^*_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{ J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) \}$$

$$J = \int_{t_0}^{t} f(x(t))\,dt \Longrightarrow \delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)}\right) \delta x(t)\,dt$$

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$$

$$\begin{cases} \partial J(x) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] \partial x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] \partial \dot{x}(t) \right\} dt \\ \partial x(t) = \int_{t_0}^{t} \partial \dot{x}(t)\,dt + \partial(x(t_0)) \end{cases}$$

با این شرایط

$$\Longrightarrow \begin{cases} \partial x(t_0) = 0 \\ \partial x(t_f) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\partial J(x, \partial x) = \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right] \partial x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \boxed{\text{معادله اولر}}\, dt}$$

$$\left\{ \partial J(x, \partial x) = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] \right\} \partial x(t)\,dt \Longrightarrow \right.$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] = 0}$$

معادله اولر

---

۱) زمان نهایی مشخص و $x(t_f)$ آزاد یا غیرمعین:

اولر:

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$$

---

۲) زمان نهایی آزاد یا غیرمعین، $x(t_f)$ مشخص:

اولر:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\right] = 0$$

---

۳) هر دو آزاد: t_f و $x(t_f)$

انحراف از

$\partial x(t_f)$ — انحراف در مسیر x_f در نقطه $t = t_f$

∂x_f — انحراف x_f در دو منحنی، یعنی هم t خودش هم منحنی

$$\partial J(x^*, \partial x) = 0 = \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)\right] \partial x_f + \left[g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)\right] \dot{x}^*(t_f)\right] \partial t_f + \text{اولر}$$

$$\text{مستقل} \begin{cases} t_f \\ x(t_f) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0} \\ g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \cancel{\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)\right] \dot{x}^*(t_f)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0}$$

$$\text{وابسته} \left\{ x(t_f) = \theta(t_f) \right. \Longrightarrow \partial x_f = \frac{d\theta}{dt}(t_f)\,\partial t_f \Longrightarrow \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)\right]\left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) - \dot{x}^*(t_f)\right] + g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0 \right.$$

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \qquad (x(t_f) \text{ آزاد}) \; (t_f \text{ ثابت})$$

تنظیم کننده خطی.

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)\right)dt$$

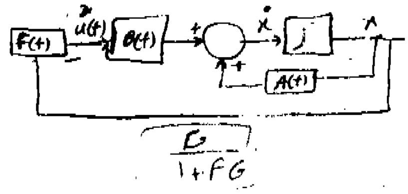
$$\boxed{\begin{aligned}&\dot{x}(t)+ax(t)=u\\&x(t)=e^{-at}x_0+e^{-at}\int_0^t e^{at}u(t)\end{aligned}}$$

$$H=\frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t)+\frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t)+p^T(t)\left(A(t)x(t)+B(t)u(t)\right)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{p}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\\-Q(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^*(t)\\p^*(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x^*(t_f)\\p^*(t_f)\end{bmatrix}=\phi(t_f,t)\begin{bmatrix}x^*(t)\\p^*(t)\end{bmatrix}$$

$$\phi(t_f,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[sI-\begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\-Q & -A^T\end{bmatrix}\right]^{-1}\right\}\Bigg|_{t\to t_f-t}$$

(R,Q,B,A ماتریس ثابت)



شرط انتهایی: $\begin{cases}p^*(t_f)=Hx^*(t_f)\\p^*(t)=K(t)x^*(t)\\u^*(t)=F(t)x(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K(t)=\left[\phi_{22}(t_f,t)-H\phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[H\phi_{11}(t_f,t)-\phi_{21}(t_f,t)\right]\\F(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\end{cases}$

$K(t)$ در معادله زیر صدق می کند

$$\begin{cases}K(t_f)=H \quad \text{شرط مرزی}\\\dot{K}(t)=-K(t)A(t)-A^T(t)K(t)-Q(t)+K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \qquad (\text{ریکاتی})\\K(t)_{n\times n}\Rightarrow \quad n^2 \text{ معادله} \xRightarrow{\text{متقارن } K} \frac{n(n+1)}{2} \text{ معادله مستقل}\end{cases}$$

$$J=\int_0^{\infty}\cdots \qquad \boxed{K(t)>0,\ F(t)<0}$$

$$0=-KA-A^TK-Q+KBR^{-1}B^TK \Leftarrow \begin{cases}K(t)=k(t)\\t\to t_f\to\infty\end{cases} \Longleftarrow$$

1) اگر زمان نامحدود باشد
2) سیستم کاملا کنترل پذیر باشد.
3) $H=0$
4) ماتریسهای A و B و R و Q ماتریس ثابت باشند.

تعقیب کننده خطی: $(t_f \text{ ثابت}) \quad (x(t_f) \text{ آزاد})$

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

$$J=\frac{1}{2}\left[x(t_f)-r(t_f)\right]^TH\left[x(t_f)-r(t_f)\right]+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\left[x(t)-r(t)\right]^TQ(t)\left[x(t)-r(t)\right]+u^T(t)R(t)u(t)\right]dt=$$

$$\frac{1}{2}\|x(t_f)-r(t_f)\|_H^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{\|x(t)-r(t)\|_{Q(t)}^2+\|u(t)\|_{R(t)}^2\right\}dt$$

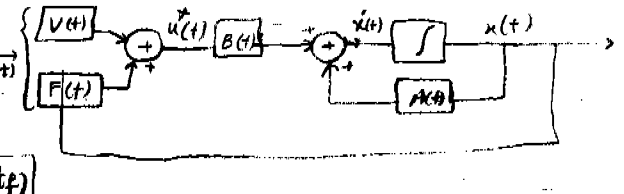
$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow u(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)p(t)$$

$$H=\frac{1}{2}\|x(t)-r(t)\|_{Q(t)}^2+\frac{1}{2}\|u(t)\|_{R(t)}^2+p^T(t)\left(A(t)x(t)+B(t)u(t)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}x^*(t_f)&=\phi_{11}x^*(t)+\phi_{12}p^*(t)+f_1(t)\\p^*(t_f)&=\phi_{21}x^*(t)+\phi_{22}p^*(t)+f_2(t)\end{aligned}}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{p}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\\-Q(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^*(t)\\p^*(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\Q(t)r(t)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x^*(t_f)\\p^*(t_f)\end{bmatrix}=\phi(t_f,t)\begin{bmatrix}x^*(t)\\p^*(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\int_{t}^{t_f}\phi(t_f,\tau)\begin{bmatrix}0\\Q(\tau)r(\tau)\end{bmatrix}d\tau}_{\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}}$$

شرط: $\begin{cases}p^*(t_f)=Hx^*(t_f)-Hr(t_f)\\p^*(t)=K(t)x^*(t)+s(t)\\u^*(t)=F(t)x(t)+v(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K(t)=\left[\phi_{22}(t_f,t)-H\phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[H\phi_{11}(t_f,t)-\phi_{21}(t_f,t)\right]\\s(t)=\left[\phi_{22}(t_f,t)-H\phi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[Hf_1(t)-Hr(t_f)-f_2(t)\right]\\v(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)s(t)\\F(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\end{cases}$



$$\dot{K}(t)=-K(t)A(t)-A^T(t)K(t)-Q(t)+K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\dot{s}(t)=-\left[A^T(t)-K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\right]s(t)+Q(t)r(t) \qquad \begin{cases}K(t_f)=H\\s(t_f)=-Hr(t_f)\end{cases}$$

اصل حداقل‌سازی پونتریاگین: (اگر u محدود باشد)

$$\dot{x}(t)=a(x(t),u(t),t)$$

$$J(u)=h(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)\,dt \quad , \quad H(x(t),u(t),p(t),t)=g(x(t),u(t),t)+p^T(t)[a(x(t),u(t),t)]$$

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t),u^*(t),p^*(t),t)\\ \dot{p}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),p^*(t),t)\\ H(x^*(t),u^*(t),p^*(t),t)\leqslant H(x^*(t),u(t),p^*(t),t) \longrightarrow \left(\cancel{\frac{\partial H}{\partial u}=0 \text{ شرط بود}}\right)\\ \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f),t_f)-p^*(t_f)\right]^T\partial x_f+\left[H(x^*(t_f),u^*(t_f),p^*(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f),t_f)\right]\partial x_f=0\end{cases}$$

u^* باید $H(x(t),u(t),p(t),t)$ را حداقل کند (یعنی باید مشتق نسبت به u صفر شود. پس حالات u دار را اجرا می‌کنیم)

۱) اگر زمان نهایی ثابت باشد و هامیلتونین به زمان نهایی بستگی نداشته باشد باید $H(x^*(t),u^*(t),p^*(t))=c_1$.
۲) ~ ~ ~ آزاد ~ ~ ~ ~ ~ بستگی ~ ~ ~ ~ $H(x^*(t),u^*(t),p^*(t))=0$.

قیود نامساوی‌های متغیرهای وضعیت: $f_i(x(t),t)\geqslant 0$

$$\begin{cases}\dot{x}_{n+1}(t)=[f_1(x(t),t)]^2u(-f_1)+[f_2(x(t),t)]^2u(-f_2)+\dots+[f_l(x(t),t)]^2u(-f_l)\\ \dot{x}_{n+1}(x)\geqslant 0\\ \text{برقراری قیود} \Rightarrow \dot{x}_{n+1}=0\\ x_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t}\dot{x}_{n+1}(t)\,dt+x_{n+1}(t_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_{n+1}=0 \text{ قیود برقرار}\\ x_{n+1}(t_0)=0 \,,\; x_{n+1}(t_f)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}H(x(t),u(t),p(t),t)=g(x(t),u(t),t)+p^Ta(x(t),u(t),t) \longrightarrow x_{n+1} \text{ به طور صریح}\\ \dot{x}_{n+1}(t)=a_{n+1}(x(t),t)=\sum_{i=1}^{l}\left([f_i(x(t),t)]^2u(f_i)\right)\end{cases}$$

شرایط $x^*(t_0)=0$ و $x_{n+1}(t_f)=0$

حداقل زمان: هدف رسیدن مجموعه از یک وضعیت اختیاری اولیه به یک مجموعه هدف

$$\dot{x}(t)=a(x(t),u(t),t)$$

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}dt=t_f-t_0$$

نوع ۱:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=a(x(t),t)+\underset{n\times m}{B}(x(t),t)u(t)\\ M_{i-}\leqslant u_i(t)\leqslant M_{i+} \,,\; (i=1,2,\dots,m)\\ H=1+p^T[a(x(t),t)+B(x(t),t)u(t)]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}H^*\leqslant H \Rightarrow \underbrace{p^{*T}(t)B(x^*(t),t)u^*(t)}_{\text{حداقل شود}}\leqslant p^{*}(t)B(x^*(t),t)u(t)\\ B(x^*(t),t)=[b_1(x^*(t),t)\mid b_2(x^*(t),t)\mid\dots\mid b_m(x^*(t),t)] \Rightarrow\\ p^{*T}(t)B(x^*(t),t)u^*(t)=\sum_{i=1}^{m}p^{*T}(t)[b_i(x^*(t),t)]u_i(t) \longrightarrow\\ p^{*T}(t)b_i(x^*(t),t)u_i(t) \quad \text{حداقل} \Rightarrow \begin{cases}M_{i+} & p^{*T}b_i(x(t),t)<0\\ M_{i-} & p^{*T}b_i(x(t),t)>0\\ \dots & p^{*T}b_i(x(t),t)=0\end{cases}\end{cases}$$

کنترل حداقل زمان سیستمای خطی متغیر با زمان

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ |u_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \left(x(t_0) = x_0\right) \Longrightarrow \left(x(t_f) = 0\right) \end{cases}$$

(راه حل در پایین)

قضیه: اگر تمام مقدارهای ویژه ماتریس A دارای قسمتهای حقیقی غیرمثبت باشند، کنترل بهینه‌ای وجود دارد که وضعیت ابتدائی x_0 را به مبدأ منتقل کند.

جواب منحصر به فرد است.
مولفه کنترل حداکثر $(n-1)$ مرتبه تغییر علامت دهد. ☆

حداقل نیروی کنترل: (با حداقل سوخت می‌خواهیم به مبدأ برسیم)

$M_{i-} \leq u_i \leq M_{i+}$

$$J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i |u_i(t)|\right] dt \qquad \text{سوخت}$$

$$J_2(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} r u_i^2(t)\right] dt \qquad \text{انرژی در مقاومت}$$

حداقل سوخت: $\left(-1 \leq u_i(t) \leq 1\right)$ و $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), t) + B(x(t), t)u(t) \\ -1 \leq u_i(t) \leq 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x(t), u(t), p(t), t) = \sum_{i=1}^{m} |u_i(t)| + p^T(t)a(x(t), t) + p^T(t)B(x(t), t) \\ B(x(t), t) = \left[b_1(x(t), t) \,\vdots\, b_2(x(t), t) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b_m(x(t), t)\right] \end{cases}$$

شرط $H^* \leq H$ را اعمال می‌کنیم

$$|u_i^*(t)| + p^{*T} b_i(x(t), t) u_i^*(t) \leq |u_i(t)| + p^{*T}(t) b_i(x(t), t) u_i(t)$$

$$|u_i(t)| + p^{*T} b_i(x^*(t), t) u_i(t) = \begin{cases} \left[1 + p^{*T}(t) b_i(x^*(t), t)\right] u_i(t) & u_i(t) \geq 0 \\ \left[-1 + p^{*T}(t) b_i(x^*(t), t)\right] u_i(t) & u_i(t) \leq 0 \end{cases}$$

$$u_i(t) = \begin{cases} 1.0 & -1.0 > p^{*T}(t) b_i(x^*(t), t) \\ 0.0 & -1.0 < p^{*T}(t) b_i(x^*(t), t) < 1.0 \\ -1.0 & 1.0 < p^{*T}(t) b_i(x^*(t), t) \\ \text{یک مقدار نامعین منفی} & p^T(t) b_i(x^*(t), t) = 1 \\ \text{یک مقدار نامعین مثبت} & p^T(t) b_i(x^*(t), t) = -1 \end{cases}$$

(برای مدت محدودی نه تنها یک نقطه گذرا بازمان)

انواع مسائل در صفحه بعد.

راه حل حداقل زمان

۱) بین x_1 و x_2 زمان را حذف می‌کنیم (به ازای هر ورودی یک معادله می‌دهد).
۲) x_1 را برحسب x_2 رسم می‌کنیم و جهت زیاد شدن زمان را نمایش می‌دهیم (دسته منحنی با تغییرات u)
۳) منحنی اصلی منحنی است که با یک نوع کنترل جواب بگیریم، (وقتی که x به جای مورد نظر می‌رود)
۴) در بالا و پایین این منحنی حالتهای کلیدزنی تعریف می‌کنیم.

$$1)\quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{به مبدا می‌رود} \\ \text{اعمال } -1}}{O_+} \cup \underset{\substack{\uparrow \\ \text{به مبدا می‌رود} \\ \text{اعمال } +1}}{O_-} = O_1$$

$$2)\quad O_2 = O_+ \cup O_- \cup \boxed{O_{+-}} \cup \boxed{O_{-+}}$$

(با اعمال $u=+1$ به O_- رسید و ...) (با اعمال $u=-1$ می‌توان به O_+ رسید و ...)

$$3)\quad O_{n-1} \text{ برای } S(x(t)) = 0 \text{ مرز تحلیل}$$

برای علامتی $S(x(t))$ تعیین می‌کنیم

// سیستم غیر متغیر با زمان است، می‌توان برای $x_1(0) = x_2(0) = 0$ با موقعیت دیگری
t تا را حل کرد، سپس $t \to t - t_f$. یا بدون t_0، t_f برای حذف t اقدام شود

(☆ در تعیین کلیدهای S مهم است و می‌توان یک ضرب نوشت) برای بدست آوردن نامساوی که می‌توان با آنها در حالات مختلف t_f حساب کرد و محدوده را پیدا کرد. (۲)

زمان نهائی آزاد:

پس از پیدا کردن مقدار u برحسب پارامترها مراحل زیر را می‌رویم:

۱) x(t) را حساب می‌کنیم. $x(t) = x_0 + \int_{t_0=0}^{t_f} f(u(t))\,dt$

(درصورت غیرمتغیر بودن پارامترها)

۲) $x(t_f)$ را حساب می‌کنیم. یعنی به ازای t_f ورودی $x(t_f)$ را حساب کرده و داریم $x(t_f)=0$

۳) حالتهای مختلف کنترل را گذاشته و مسئله را حل می‌کنیم و u را و t_f را حساب می‌کنیم.

۴) برای هدف J را حساب می‌کنیم.

۵) (نکته: اگر به دست آمد که با صرف زمان زیادی و بدون سوخت (= سوخت صفر) می‌توان به جواب رسید کنترل بهینه‌ای نداریم. یعنی

(اگر توانستیم نشان دهیم با $t_f \to \infty$ می‌توان J را صفر کرد، کنترل بهینه نداریم)

(پس اگر سیستم به حال عادی می‌توانست به سمت صفر برود ما ولش می‌کنیم تا برود)

زمان نهائی معین:

t^*: حداقل زمان لازم برای رسیدن به مجموعه هدف مشخصی، از وضعیت ابتدائی x_0 است. ($x(T)=0$ به مبدأ برود)

۱) تعیین می‌کنیم که برای حداقل زمان چه شرایط اولیه‌ای لازم است و کوچکترین و بزرگترین x_0 را به دست می‌آوریم. یعنی با تغییر u می‌خواهیم محدوده x_0 کدام است.

۲) برای دو طرف محدوده که هیچ، برای باقی قسمتها می‌توان نقطه شکست را با انتگرال‌گیری به دست آورد ($x(T)=0$)

۳) از نظر محاسباتی بهتر است $u^*(t)$ برحسب x(t) پیدا شود و T و t و x_0. پس

۴) $x(T)$ را حساب می‌کنیم از روی معادله x(t) و برعکس یعنی

$$\begin{cases} x(t) \longleftrightarrow x(T) \\ t \longrightarrow (T-t) \\ \int_0^t \longrightarrow \int_t^T \end{cases}$$

... حالتی که در آخر بازهٔ زمانی $t \geq t_1$ باشیم x(t) را به دست آورده

چون اتحاد داریم،

محل برخورد دو x(t) می‌تواند عوض شدن کنترل باشد:

انتخاب زمان نهائی:

با معادلاتی که داریم،

تابع ترکیبی زمان و سوخت :

t_f آزاد و غیر مشخص

$$\begin{cases} \lambda \to 0 & \text{بهینه سوخت} \\ \lambda \to \infty & \text{زمان بهینه} \end{cases}$$

$$\left\{ J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\lambda + |u(t)| \right] dt \right.$$

مسائل حداقل انرژی :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\lambda + u^2(t) \right] dt$$

محدوده های استثنائی :

بهینه خطی : (t_f آزاد)

حداقل زمان به $s(t)$ برسیم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ |u(t)| \leq 1, \\ H = 1 + p^T(t)\, Ax(t) + p^T(t) b u(t) = 0 \end{cases} \rightarrow p^* b = 0 \Longrightarrow$$

استثنائی : $\Rightarrow \begin{cases} p^*(t) = 0 \Rightarrow \times \\ b = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

پس کنترل پذیر نیست

> نکته : t_f آزاد
> $H = 0$

باید E استثنائی باشد پس کنترل پذیر است پس استثنائی (محدوده) ندارد : $E = [b \mid Ab \mid A^2 b \mid \dots \mid A^{n-1} b]$

مسائل خطی بهینه سوخت :

باید استثنائی باشد

$$[b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1} b]^T A^T$$

سریع‌ترین سقوط:

(t_f معین و $x(t_f)$ نامعین)

$$\begin{cases}\dot{x}^{(i)}(t)=a(x^{(i)}(t),u^{(i)}(t),t)\\ \dot{p}^{(i)}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t),u^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x^{(i)}(t_0)=x_0\\ p^{(i)}(t_f)=\frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f))\end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^{(i)}(t),u^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)=0$$ فرض کنیم برقرار شود.

الگوریتم

۱) $u^{(0)}(t)$ را در $[t_0,t_f]$ منقطع تقریب می‌زنیم.

۲) $u^{(i)}$ را داریم پس با شرط $x^{(i)}(t_0)=x_0$ ، $x^{(i)}$ را بدست می‌آوریم.

۳) $x^{(i)}(t_f)$ داریم پس $p^{(i)}(t_f)$ بدست می‌آید.

۴) در معادله بعدی با انتگرال گیری $p^{(i)}(t)$ بدست می‌آید.

۵) $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}$ را بدست آورده

۶) اگر $\left(\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t)\right]^T\left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\right]dt=\left\|\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\right\|\right)<\gamma$

برای وقتی که زمان نهائی معین است برای یک دنباله متغیر

اگر نه داریم:

$$u^{(i+1)}(t_k)=u^{(i)}(t_k)-\tau\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t_k)$$

$$\{u^{(i)}(t)=u^{(i)}(t_k)\ ,\ t\in[t_k,t_{k+1}]$$

روش انتخاب τ :

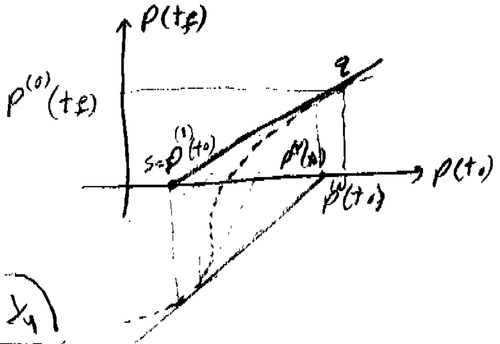
$$\begin{cases}(\text{راه ۱})\ \ \tau=\dfrac{\frac{q}{100}|J_a|}{\left\|\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\right\|^2} \ ;\ \begin{cases}\left\|\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\right\|\to 0\\ q\to 0\end{cases}\\[2ex] (\text{راه ۲})\ \ \tau_{\text{دلخواه}}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}\\ u^{(i+1)}\end{cases}\Rightarrow J_a \quad \text{که کمترین } J_a \ \tau\end{cases}$$

تغییر نهایی:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=a(x(t),u(t),t)\\ J=\int_{t_0}^{t_f}g(x(t),u(t),t_0)dt\end{cases} \quad \begin{cases}x(t_0)=x_0\\ t_f, t_0 \ \text{معلوم‌اند}\\ \frac{\partial H}{\partial u}=0\Longrightarrow u(t)\ \text{بدست می‌آید}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=a(x(t),p(t),t)\\ \dot{p}(t)=d(x(t),p(t),t)\end{cases}$$

(الگوریتم ساده)

$$\begin{cases}p(t_f)=0\\ x(t_0)=x_0\end{cases},\ \begin{cases}\dot{x}(t)=a(x(t),p(t),t)\\ \dot{p}(t)=d(x(t),p(t),t)\end{cases} \Longrightarrow p^{(0)}(t_0)\ \text{حدس بزنیم} \Longrightarrow p^{(0)}(t_f)=p^{(0)}$$



$$p^{(1)}(t_0)=p^{(0)}(t_0)-\left[\frac{dp(t_f)}{dp(t_0)}\Big|_{p^{(0)}(t_0)}\right]^{-1}\times p^{(0)}(t_f)$$

اگر $p(t_f)$ مقدار ثابت غیرصفر p_f باشد داریم

$$p^{(1)}(t_0)=p^{(0)}(t_0)-\left[\frac{dp(t_f)}{dp(t_0)}\Big|_{p^{(1)}(t_0)}\right]^{-1}\left[p^{(0)}(t_f)-p_f\right]$$

بسطهای لازم :

اگر $h(x(t_f))$ نباشد:

$$\rho^{(i+1)}(t_0)=\rho^{(i)}(t_0)-\left[P_\rho\left(\rho^{(i)}(t_0),t_f\right)\right]^{-1}\rho^{(i)}(t_f)$$

$$P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t)\triangleq\left[\begin{matrix}\frac{\partial\rho_1(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)} & \frac{\partial\rho_1(t_f)}{\partial\rho_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial\rho_1(t_f)}{\partial\rho_n(t_0)}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial\rho_n(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)} & \frac{\partial\rho_n(t_f)}{\partial\rho_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial\rho_n(t)}{\partial\rho_n(t_0)}\end{matrix}\right]_{\rho^{(i)}(t_0)}$$

اگر $h(x(t_f))$ باشد :

$$\rho^{(i+1)}(t_0)=\rho^{(i)}(t_0)+\left\{\left[\frac{\partial^2h}{\partial x^2}(x(t_f))\right]P_x(\rho(t_0),t_f)-P_\rho(\rho(t_0),t_f)\right]_i\Big\}^{-1}\cdot\left[\rho(t_f)-\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))\right]_i$$

$$P_x(\rho^{(i)}(t_0),t)\triangleq\left[\begin{matrix}\frac{\partial x_1(t)}{\partial\rho_1(t_0)} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial\rho_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial\rho_n(t_0)}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial x_n(t)}{\partial\rho_1(t_0)} & \frac{\partial x_n(t)}{\partial\rho_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_n(t)}{\partial\rho_n(t_0)}\end{matrix}\right]_{\rho^{(i)}(t_0)}$$

$$\left[\frac{\partial^2h}{\partial x^2}(x(t_f))\right]_{jk}=\frac{\partial^2h}{\partial x_j\,\partial x_k}(x(t_f))$$

درایه jk

سوا کردن P_ρ و P_x :

روش ۱ :

الف) $\rho(t_0)=\rho^{(i)}(t_0)$ و $x(t_0)=x_0$ ، $\rho^{(i)}(t_f)$ و $x^{(i)}(t_f)$ را پیدا می‌کنیم

ب) تغییری $\delta\rho_1(t_0)$ در اولین عنصر $\rho^{(i)}(t_0)$ ایجاد کرده و دوباره $\overline{\rho^{(i)}(t_f)}$ و $\overline{x^{(i)}(t_f)}$ را پیدا می‌کنیم

اولین ستون $P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t_f)$ داریم :

$$\left.\frac{\partial\rho(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)}\right|_{\rho^{(i)}(t_0)}=\frac{\partial\rho(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)}$$

ج) ستون اول $P_x(\rho^{(i)}(t_0),t_f)$ از رابطه

$$\left.\frac{\partial x(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)}\right|_{\rho^{(i)}(t_0)}=\frac{\partial x(t_f)}{\partial\rho_1(t_0)}$$

د) همینطور تا آخر

روش ۲ :

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial\rho}(x(t),\rho(t),t)\\ \dot{\rho}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),\rho(t),t)\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\left[P_x(\rho^{(i)}(t_0),t)\right]=\left[\frac{\partial^2H}{\partial\rho\partial x}\right]_i P_x(\rho^{(i)}(t_0),t)+\left[\frac{\partial^2H}{\partial\rho^2}(t)\right]_i P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t)\\ \frac{d}{dt}\left[P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t)\right]=\left[-\frac{\partial^2H}{\partial x^2}(t)\right]_i P_x(\rho^{(i)}(t_0),t)+\left[-\frac{\partial^2H}{\partial x\partial\rho}(t)\right]_i P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_x(\rho^{(i)}(t_0),t_0)=\left.\frac{\partial x(t_0)}{\partial\rho(t_0)}\right|_{\rho^{(i)}(t_0)}=\bar{0}\\ P_\rho(\rho^{(i)}(t_0),t_0)=\left.\frac{\partial\rho(t_0)}{\partial\rho(t_0)}\right|_{\rho^{(i)}(t_0)}=\bar{I}\end{cases}$$

الگوریتم تغییر تابیاد:

۱) معادلات کاهش یافته را با حل $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ برای $u(t)$ برحسب $x(t)$ و $\rho(t)$ حل کرده و در معادلات وضعیت و کمک وضعیت می‌گذاریم.

۲) $\rho^{(0)}(t_0)$ را حدس زده و $i=0$.

۳) $x(t_0)=x_0$ و $\rho(t_0)=\rho^{(i)}(t_0)$: معادلات $\left\{\begin{array}{l}\text{وضعیت}\\ \text{کمک وضعیت}\\ \text{دوتای آخری}\end{array}\right.$ را حل می‌کنیم، $\rho^{(i)}(t_f)$ و $x^{(i)}(t_f)$, $\rho_f(\rho^{(i)}(t_0), t_f)$ ، $\rho_x(\rho^{(i)}(t_0), t_f)$ ذخیره شود.

۴) $\|\rho^{(i)}(t_f)-\frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f))\|<\delta$

۵) $\rho^{(i+1)}(t_0)$ پیدا شده و بالا می‌رویم.

الگوریتم خطی سازی مجازی:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=a_{11}(t)x(t)+a_{12}(t)\rho(t)+e_1(t)\\ \dot{\rho}(t)=a_{21}(t)x(t)+a_{22}(t)\rho(t)+e_2(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^H(t_0)=0\\ \rho^H(t_0)=1\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{معادلات را همگن}\\ \text{گرفته و جواب}\\ \text{بدست می‌آوریم}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x^H(t)\\ \rho^H(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^P(t_0)=x_0\\ \rho^P(t_0)=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{معادلات غیر}\\ \text{همگن را حل}\\ \text{کنیم}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x^P(t)\\ \rho^P(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x(t)=c_1x^H(t)+x^P(t)\\ \rho(t)=c_1\rho^H(t)+\rho^P(t)\end{cases}\Rightarrow \rho(t_f)=\rho_f=c_1\rho^H(t_f)+\rho^P(t_f)$$

$$c_1=\frac{\rho_f-\rho^P(t_f)}{\rho^H(t_f)}$$

خطی کردن:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0\Rightarrow u(t)=\cdots\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}(t)=a(x(t),\rho(t),t)\\ \dot{\rho}(t)=d(x(t),\rho(t),t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{(0)}(t)\ :\ \text{مسیر معلوم}\\ x^{1}(t)\ :\ \text{منحنی مسیر دیگر}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}^{(1)}(t)=a_{11}(t)x^{(1)}(t)+a_{12}(t)\rho^{(1)}(t)+e_1(t)\\ \dot{\rho}^{(1)}(t)=a_{21}(t)x^{(1)}(t)+a_{22}(t)\rho^{(2)}(t)+e_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}(t)=\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)\\ a_{12}(t)=\frac{\partial a}{\partial \rho}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)\\ a_{21}(t)=\frac{\partial d}{\partial x}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)\\ a_{22}(t)=\frac{\partial d}{\partial \rho}(x^{(0)}(t),\rho^{(1)}(t),t)\\ e_1(t)=a(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)-\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)x^{(0)}(t)-\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)\rho^{(0)}(t)\end{cases}$$

$$e_2(t)=d(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)-\frac{\partial d}{\partial x}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)x^{(0)}(t)-\frac{\partial d}{\partial \rho}(x^{(0)}(t),\rho^{(0)}(t),t)\rho^{(0)}(t)$$

روش حل :

۱) معادلات غیرخطی را خطی کنیم.
۲) مسائل با مقدار مرزی در دو نقطه مجزا را حل کنیم.

$$\begin{cases} x(t_f) & \text{آزاد} \\ t_f & \text{معین} \\ p(t_f)=p_f \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t)=a(x(t),p(t),t) \\ \dot{p}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t),t) \end{cases}$$

الگوریتم :

۱) معادلات کاهش یافته را پیدا کنیم.

۲)

$$\dot{x}^{(i+1)}(t)=a(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)+\left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)\right]\left[x^{(i+1)}(t)-x^{(i)}(t)\right]+\left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)\right]\left[p^{(i+1)}(t)-p^{(i)}(t)\right]$$

$$\dot{p}^{(i+1)}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)-\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)\right]\left[x^{(i+1)}(t)-x^{(i)}(t)\right]-\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^{(i)}(t),p^{(i)}(t),t)\right]\left[p^{(i+1)}(t)-p^{(i)}(t)\right]$$

۳) $x^{(0)}(t)$ و $p^{(0)}(t)$ را حدس زده.

۴) A_{11} و A_{12} و A_{21} و A_{22} و e_1 و e_2 ،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}^{(i+1)}(t) \\ \dot{p}^{(i+1)}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(i+1)}(t) \\ p^{(i+1)}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \\ A_{11}=\dfrac{\partial a}{\partial x} \quad A_{12}=\dfrac{\partial a}{\partial p} \text{ و } A_{21}=-\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} \text{ و } A_{22}=\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \end{cases}$$

۵)

معادلات همگن

$$\begin{cases} x^{H1}(t_0)=0 \\ p^{H1}(t_0)=[1\ 0\ \dots\ 0] \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{H2}(t_0)=0 \\ p^{H2}(t_0)=[0\ 1\ 0\ \dots] \end{cases}$$

خروجی $x^{H1}(t)$ و $x^{H2}(t)$ و ...

معادلات کلی

$$\begin{cases} x^{p}(t_0)=0 \\ p^{p}(t_0)=0 \end{cases}$$

خروجی $x^{p}(t)$ و $y^{p}(t)$

۶)

$$\begin{cases} x^{(i+1)}(t)=c_1 x^{H1}(t)+c_2 x^{H2}(t)+\dots+c_n x^{Hn}(t)+x^{p}(t) \\ p^{(i+1)}(t)=c_1 p^{H1}(t)+c_2 p^{H2}(t)+\dots+c_n p^{Hn}(t)+p^{p}(t) \end{cases}$$

E4

$$\begin{cases} C = \left[\rho^{H1}(t_f) - M x^{H1}(t_f) \;\vdots\; \rho^{H2}(t_f) - M x^{H2}(t_f) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \rho^{Hn}(t_f) - M x^{Hn}(t_f)\right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^{(1)}(t_f)) - M x^{(1)}(t_f) + M x^{\rho}(t_f) - \rho^{\rho}(t_f)\right] \\ M = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^{(1)}(t_f)) \end{cases}$$

تصویر گرادیان :

$$\sum_{j=1}^{k} n_{ji} - \nu_i \geqslant 0 \;,\; (i = 1, 2, \ldots, L) \;,\; \left(\sum (n_{ji})^2 = 1\right) \;,\; (L \geqslant k+1)$$

(R بسته باشد)

$$n_i = [n_{1i}, n_{2i}, \ldots, n_{ki}]^T_{k\times 1} \Longrightarrow n_i^T y - \nu_i = \lambda_i(y) \geqslant 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$\begin{cases} \lambda_i(y) = 0 \Rightarrow H_i \text{ روی } R \\ \lambda_i(y) > 0 \Rightarrow R \text{ داخل ناحیه} \\ n_i \perp H_i \;,\; R \text{ از روی } H_i \text{ به داخل} \end{cases} \Longrightarrow N_L = [n_1 \; n_2 \cdots n_L]_{k\times L}$$

$$\nu_L = [\nu_1 \; \nu_2 \cdots \nu_L]^T$$

$$\lambda(y) = [\lambda_1(y) \;\; \lambda_2(y) \cdots \lambda_L(y)]^T$$

$$\Longrightarrow N_L^T y - \nu_L = \lambda(y) \geqslant 0$$

$$(N_L^T)_{L\times k} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}_{k\times 1} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \end{pmatrix}_{L\times 1} \geqslant 0$$

$$\begin{cases} P_q = I - N_q [N_q^T N_q]^{-1} N_q^T = I - \tilde{P}_q \\ s = y + P_q \left[-\frac{\partial f}{\partial y}\right] \end{cases}$$

الزامات محاسبه

۱) گرادیان : $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^T$

۲) P_q :

$$\begin{cases} \lambda(y^{(i)}) = N_L^T y^{(i)} - \nu_L \\ \lambda_j(y^{(i)}) > 0 \Rightarrow n_j \text{ در } N_q \text{ نیست} \\ \lambda_j(y^{(i)}) = 0 \Rightarrow n_j \text{ در } N_q \text{ هست} \end{cases}$$

۳) حداکثر گام :

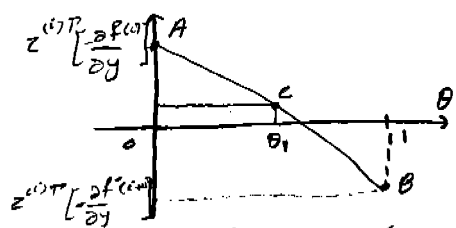
$$z_i = \frac{P_q\left[-\frac{\partial f^{(i)}}{\partial y}\right]}{\|\text{بالائی}\|} \quad ,$$

$$\begin{cases} y = y^{(i)} + \tau z^{(i)} \\ \tau_j = \frac{\nu_j - n_j^T y^{(i)}}{n_j^T z^{(i)}} \quad n_j \text{ در } N_q \text{ نیست} \end{cases} \longrightarrow \text{حداقل مثبت } \tau_j \text{ جواب است.}$$

۴) میان یابی :

<u>میان یابی</u> : اگر حداکثر گام‌ها برای رسیدن به $y^{((i+1))}$ برداشته شود باید به عقب برگردیم برای جواب برداشتن حداکثر گام باید :

$$\underbrace{z^{(i)T}}_{\text{گرادیان تصویر شده واحد در } y^{(i)}}\left[-\frac{\partial f}{\partial y}\left(y'^{((i+1))}\right)\right] : \begin{cases} \geqslant 0 & \text{حداکثر گام} \\ < 0 \Rightarrow y^{(i+1)} = y^{(i)} + \theta \tau_m z^{(i)} \end{cases}$$



پیدا کردن θ :

$$\theta = 0 \text{ , } \theta = 1 \Longrightarrow \quad \theta_1 = \frac{z^{(i)T}\left[-\frac{\partial f^{(i)}}{\partial y}\right]}{z^{(i)T}\left[-\frac{\partial f^{(i)}}{\partial y}\right] - z^{(i)T}\left[-\frac{\partial f^{(i+1)}}{\partial y}\right]}$$

سپس $\quad y'^{((i+1))} = y^{(i)} + \theta_1 \tau_m z^{(i)}$

$$z^{(i)T}\left[-\frac{\partial f'^{((i+1))}}{\partial y}\right] \Rightarrow \begin{cases} > 0 \Rightarrow B \text{ و } C \\ < 0 \Rightarrow A \text{ و } C \end{cases}$$

تا جایی که $\quad \left| z^{(i)T}\left[-\frac{\partial f^{(i+1)}}{\partial y}\right] \right| < \epsilon_2$

<u>خلاصه</u> :

$$\begin{cases} P_q\left[-\frac{\partial f}{\partial y}(y^*)\right] = 0 \\ \left[N_q^T N_q\right]^{-1} N_q^T\left[-\frac{\partial f}{\partial y}(y^*)\right] \leqslant 0 \end{cases}$$

f در y^* حداقل همه جانبه مقید است.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t))\, dt$$

$$\begin{cases} M_{i-} \leqslant u_i(t) \leqslant M_{i+} & : t \in [0, t_f] \\ S_{i-} \leqslant x_i(t) \leqslant S_{i+} & : t \in [0, t_f] \\ x_i(t_j) = T_{ij} \end{cases}$$

گسسته سازی:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + a(x(t), u(t)) \cdot \Delta t$$

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + a(x(k), u(k)) \cdot \Delta t = a_D(x(k), u(k)) \\ J_D = h(x(N)) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(k), u(k)) \end{cases}$$

خطی سازی:

$$4\text{-}4\text{-}54 \Longrightarrow \begin{cases} x^{(i+1)}(k+1) = A(k)\, x^{(i+1)}(k) + B(k)\, u^{(i+1)}(k) + c(k) \\ M_{i-} \leqslant u_i(k) \leqslant M_{i+} \\ S_{i-} \leqslant x_i(k) \leqslant S_{i+} \\ x_i(j) = T_{ij} \quad \text{مشخص } J \end{cases}$$

جواب بدست آوردن:

$$\begin{cases} x_H(k+1) = A(k)\, x_H(k) + c(k) \\ x_H(0) = x_0 \end{cases}, \quad D_l^{k+1} = \begin{cases} A(k)A(k-1)\cdots A(l+1)B(l) & k > l \\ B(l) & k = l \\ 0 & k < l \end{cases}$$

بالا مثلثی صفر

$$\begin{bmatrix} x^{(i+1)}(0) \\ x^{(i+1)}(1) \\ x^{(i+1)}(2) \\ \vdots \\ x^{(i+1)}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^0 & D_1^0 & D_2^0 & \cdots & D_{N-1}^0 \\ D_0^1 & D_1^1 & D_2^1 & \cdots & D_{N-1}^1 \\ D_0^2 & D_1^2 & D_2^2 & \cdots & D_{N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_0^N & D_1^N & D_2^N & \cdots & D_{N-1}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(i+1)}(0) \\ u^{(i+1)}(1) \\ u^{(i+1)}(2) \\ \vdots \\ u^{(i+1)}(N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_H(0) \\ x_H(1) \\ x_H(2) \\ \vdots \\ x_H(N) \end{bmatrix}$$

قید را به صورت

$$[S_-] \leqslant x(k) \leqslant [S_+] \Longrightarrow [S_-] \leqslant D_0^k u^{(i+1)}(0) + \cdots + D_{N-1}^k u^{(i+1)}(N-1) + x_H(k) \leqslant [S_+]$$